

Задача 4.8

Колотов Антон, 302

Условие

Найти спектр сигнала $y(t) = \begin{cases} a \sin(\Omega t + \varphi), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ непосредственным вычислением и с использованием свойств преобразования Фурье. Отдельно рассмотреть случаи $\varphi = 0$ и $\Omega = \frac{2\pi n}{t_2 - t_1}$, где $n = 1, 2, 10, n \rightarrow \infty$. Для этих случаев построить графики $S(\omega)$.

Спектр

Найдём спектр непосредственным вычислением.

$$y(t) \leftrightarrow S(\omega)$$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} a \sin(\Omega t + \varphi) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2i} (e^{i(\Omega t + \varphi)} - e^{-i(\Omega t + \varphi)}) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{a}{4\pi i} \left[\int_{t_1}^{t_2} e^{i((\Omega - \omega)t + \varphi)} dt - \int_{t_1}^{t_2} e^{-i((\Omega + \omega)t + \varphi)} dt \right] = \\ &= -\frac{a}{4\pi} \left[\frac{e^{i((\Omega - \omega)t_2 + \varphi)} - e^{i((\Omega - \omega)t_1 + \varphi)}}{(\Omega - \omega)} + \frac{e^{-i((\Omega + \omega)t_2 + \varphi)} - e^{-i((\Omega + \omega)t_1 + \varphi)}}{(\Omega + \omega)} \right] \end{aligned}$$

Спектр

Можно также найти спектр с помощью свойств преобразования Фурье.

Пусть $x(t) = \begin{cases} a, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - прямоугольный импульс

Тогда $y(t)$ есть свертка $x(t)$ и синуса, представив синус в виде разности экспонент и вынося константы $e^{\pm i\varphi}$, на основании теорем о свертке и временном сдвиге получим спектр $y(t)$ в виде разности двух спектров, а именно спектра функции $x(t)$, перенесенного на частоту $+\Omega$, и спектра функции $x(t)$, перенесенного на частоту $-\Omega$. Получим результат аналогичный предыдущему слайду.

Рассмотрим
случаи

$$\varphi = 0$$

$$\Omega = \frac{2\pi n}{t_2 - t_1}$$

Функция будет иметь вид $y(t) = \begin{cases} a \sin(\frac{2\pi n}{t_2 - t_1} t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

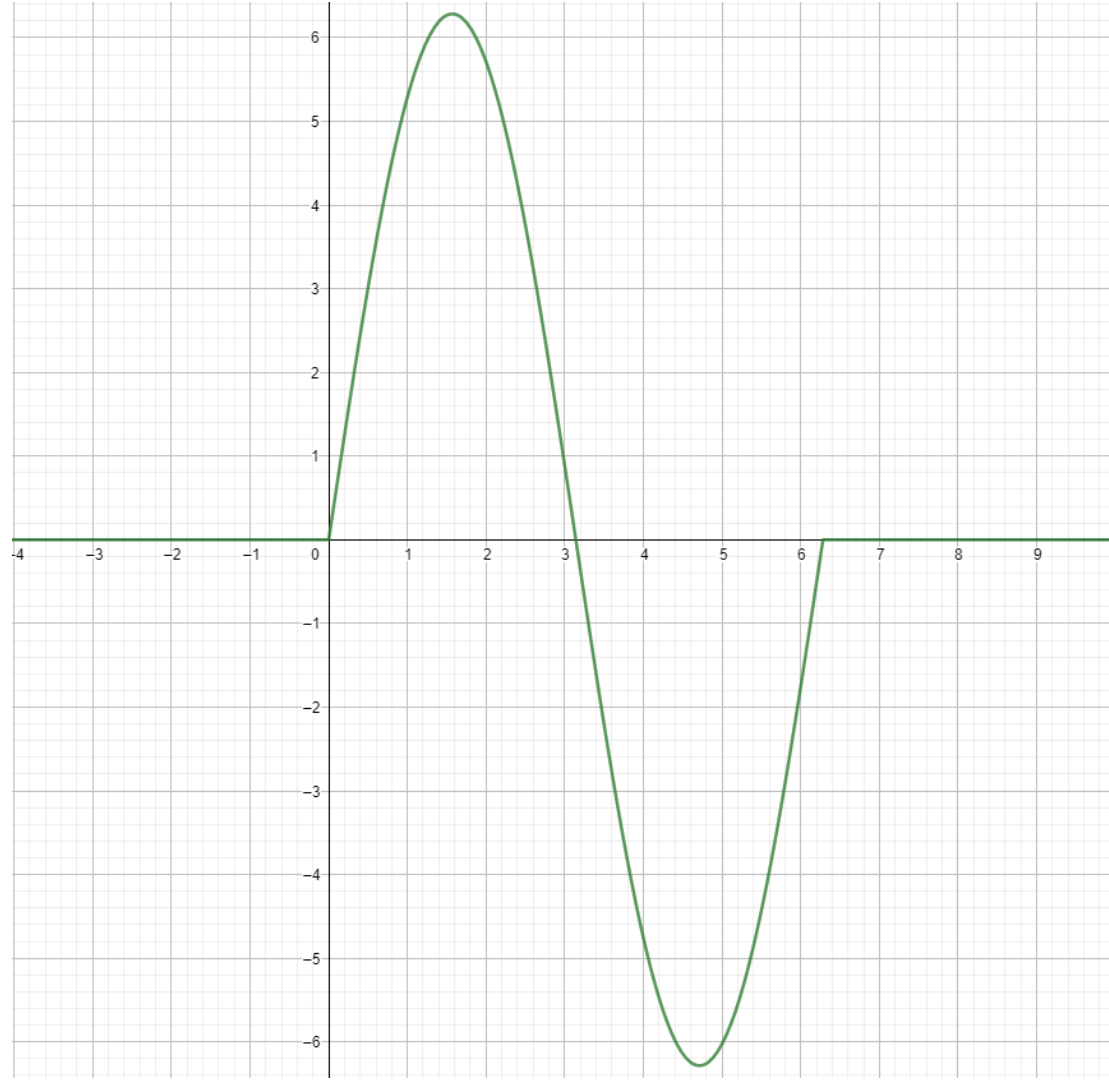
Её спектр имеет вид

$$S(\omega) = -\frac{a}{4\pi} \left[\frac{e^{i\left(\left(\frac{2\pi n}{t_2 - t_1} - \omega\right)t_2\right)} - e^{i\left(\left(\frac{2\pi n}{t_2 - t_1} - \omega\right)t_1\right)}}{\left(\frac{2\pi n}{t_2 - t_1} - \omega\right)} + \frac{e^{-i\left(\left(\frac{2\pi n}{t_2 - t_1} + \omega\right)t_2\right)} - e^{-i\left(\left(\frac{2\pi n}{t_2 - t_1} + \omega\right)t_1\right)}}{\left(\frac{2\pi n}{t_2 - t_1} + \omega\right)} \right]$$

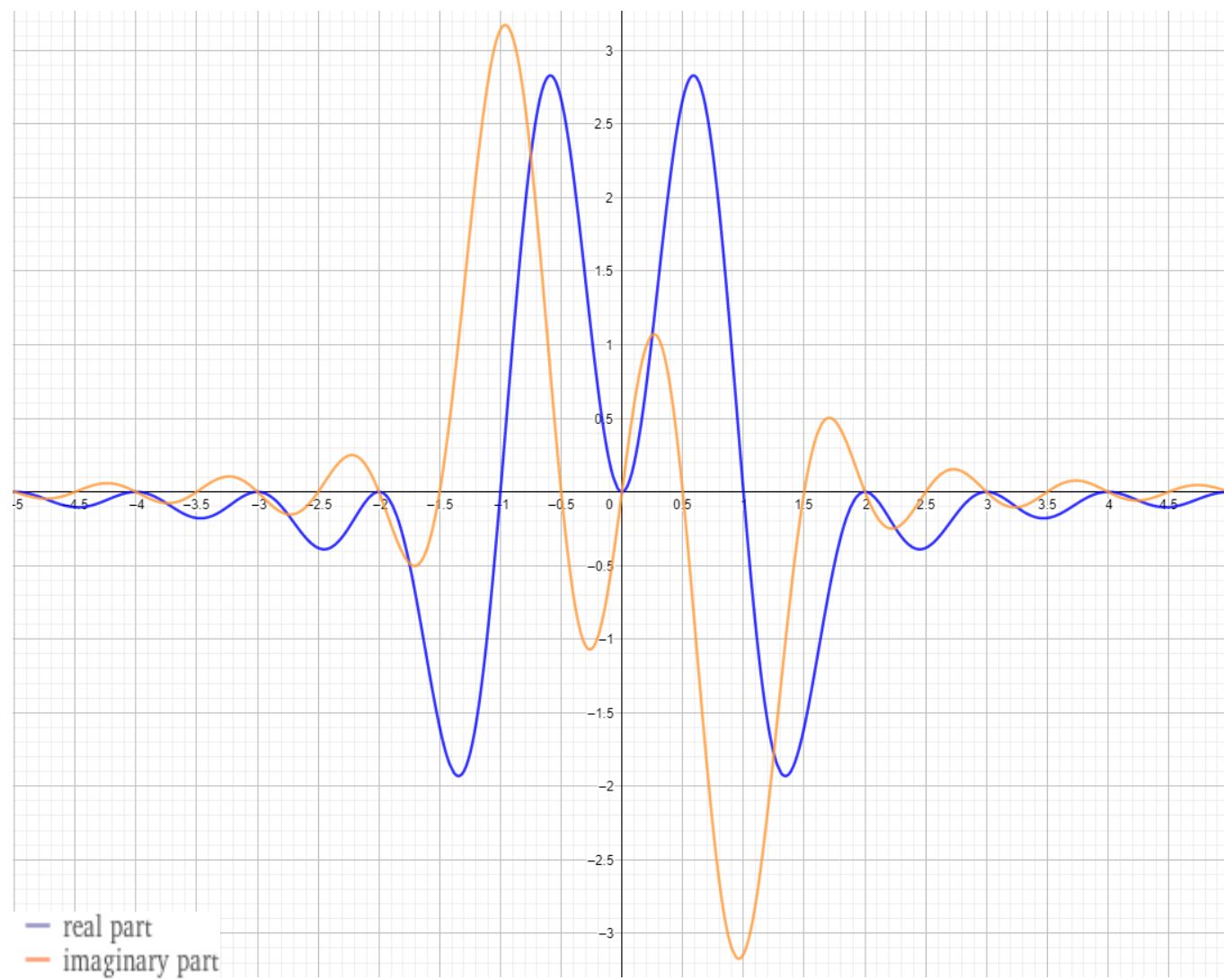
Допущения для построения графиков

Для простоты положим $a = 2\pi, t_1 = 0, t_2 = 2\pi$

График
функции при
 $n = 1$



Спектр функции при $n = 1$



Амплитудный спектр функции при $n = 1$

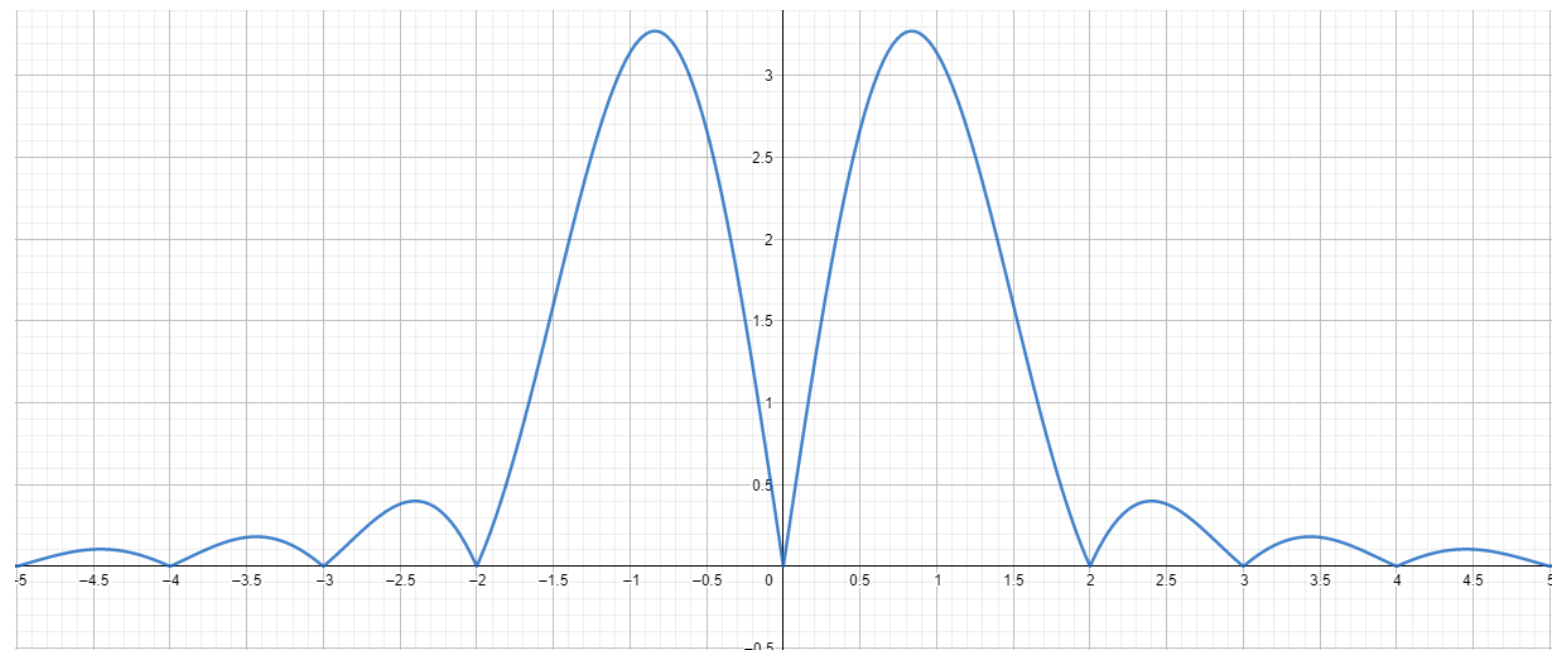
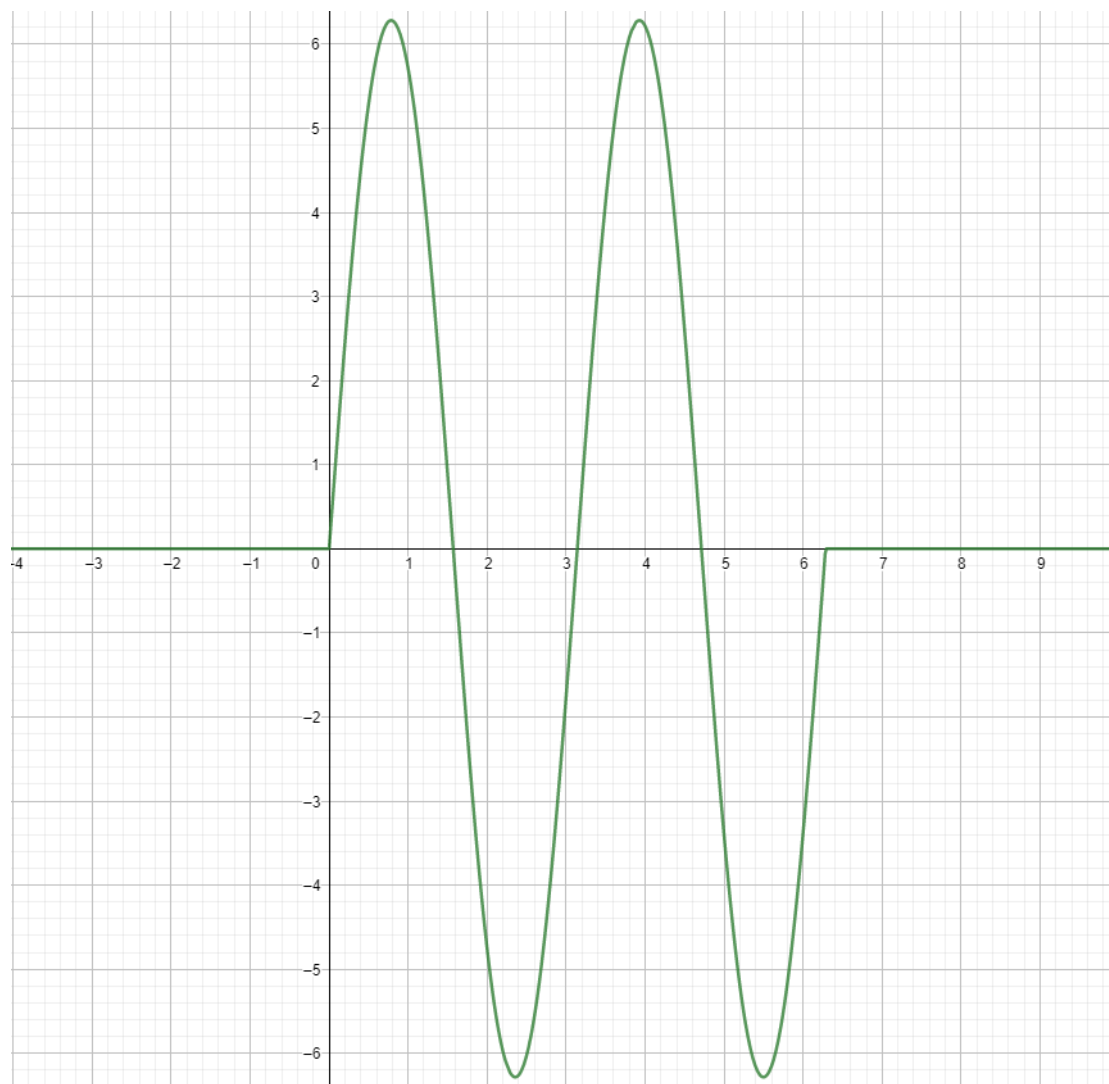
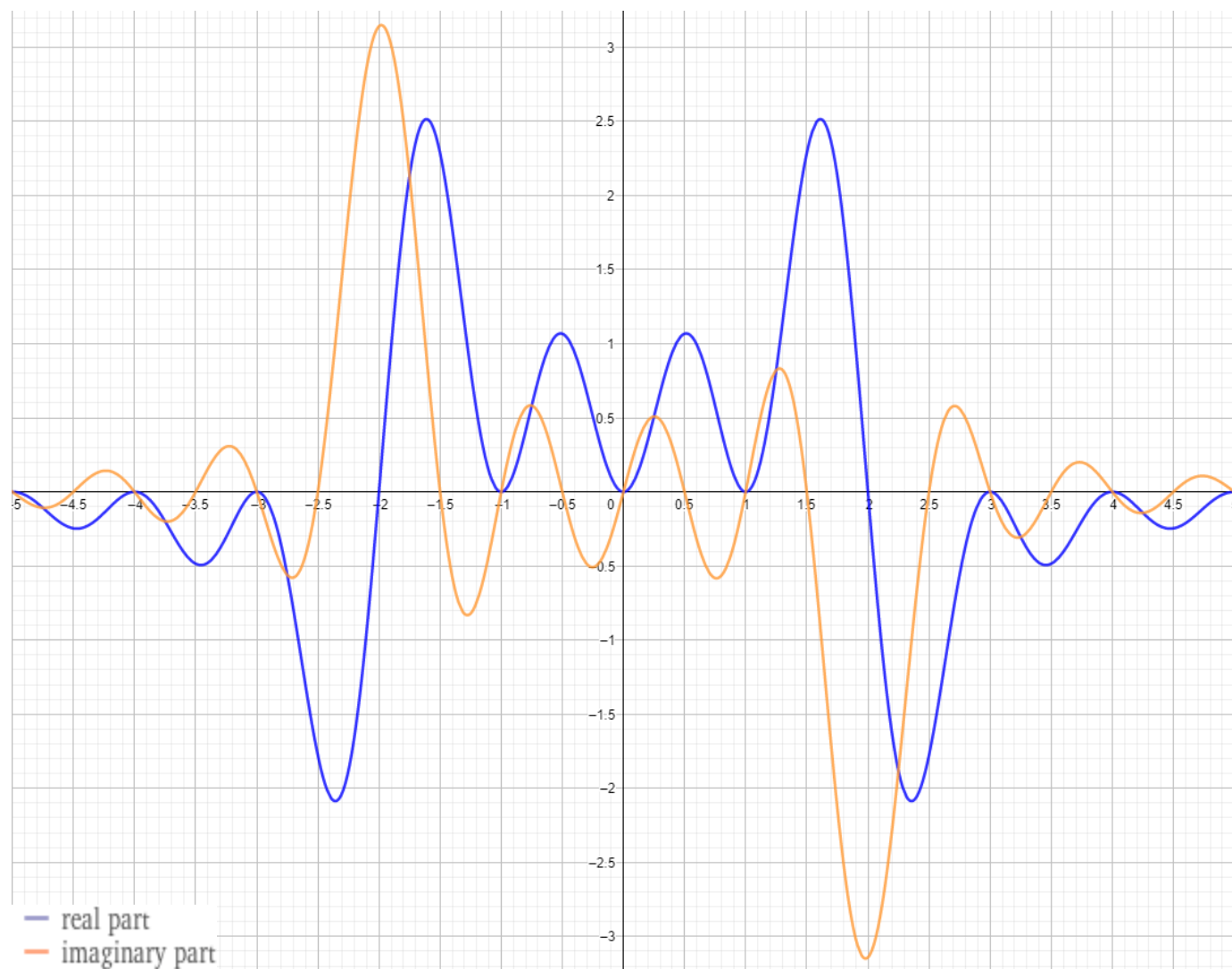


График
функции при
 $n = 2$



Спектр функции при $n = 2$



Амплитудный спектр функции при $n = 2$

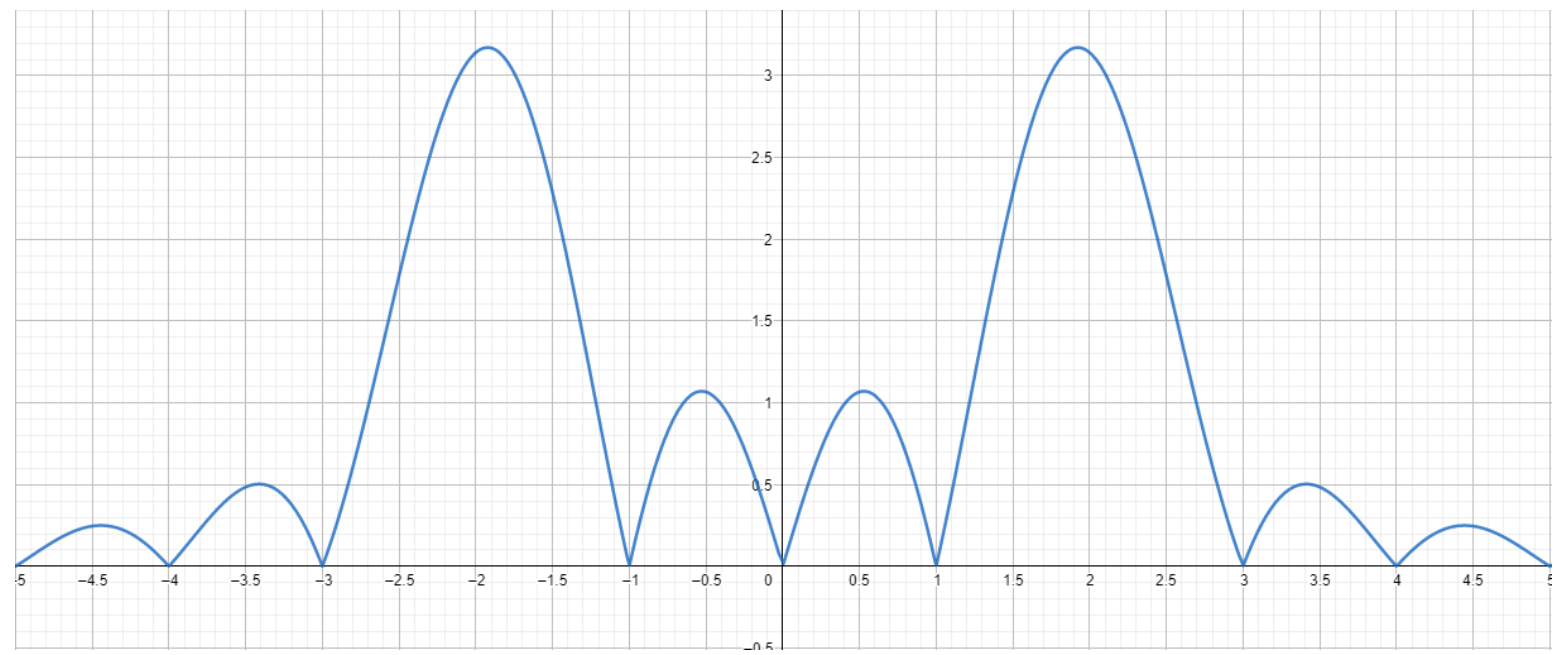
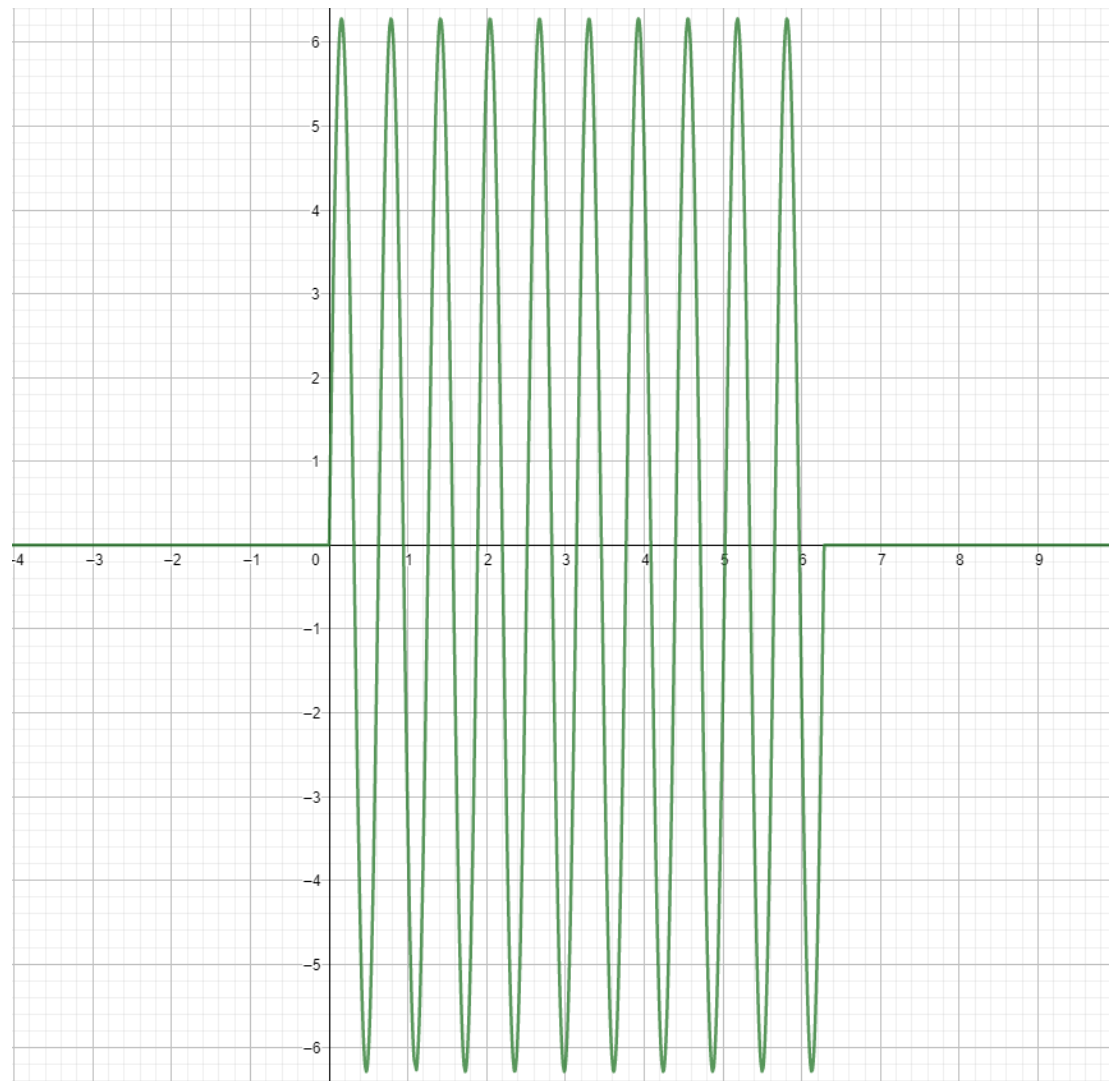
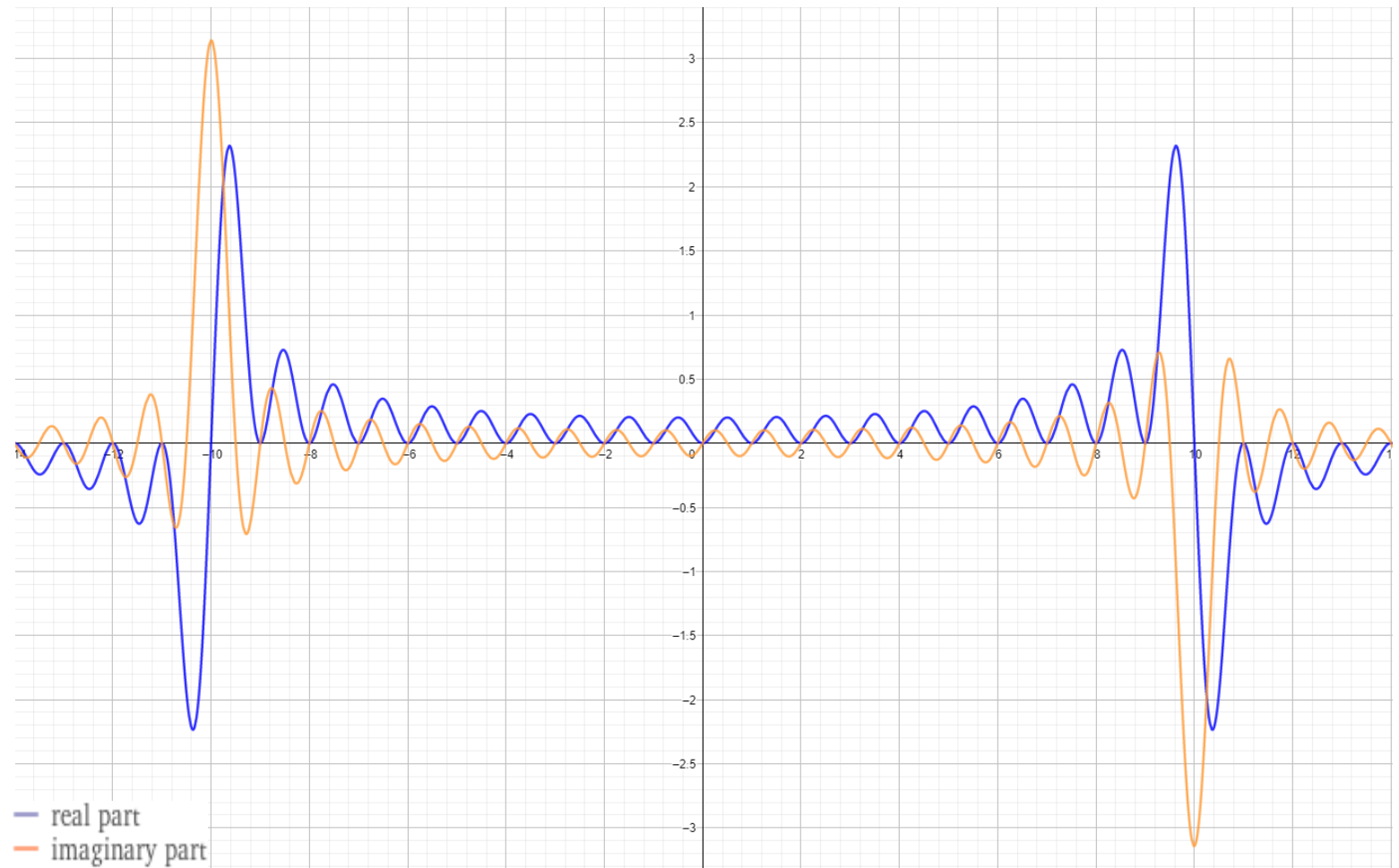


График
функции при
 $n = 10$



Спектр функции при $n = 10$



Амплитудный
спектр
функции при
 $n = 10$

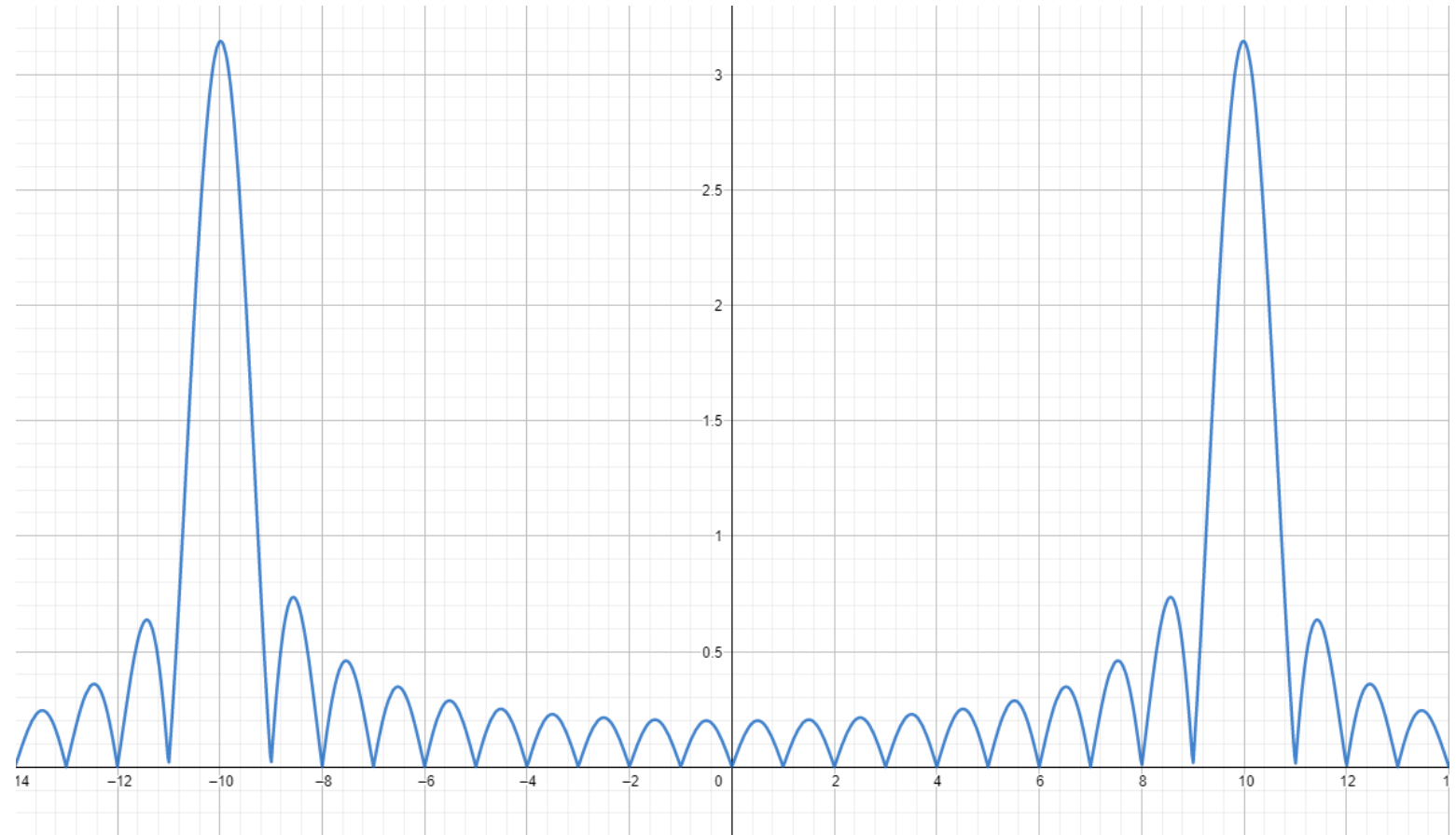
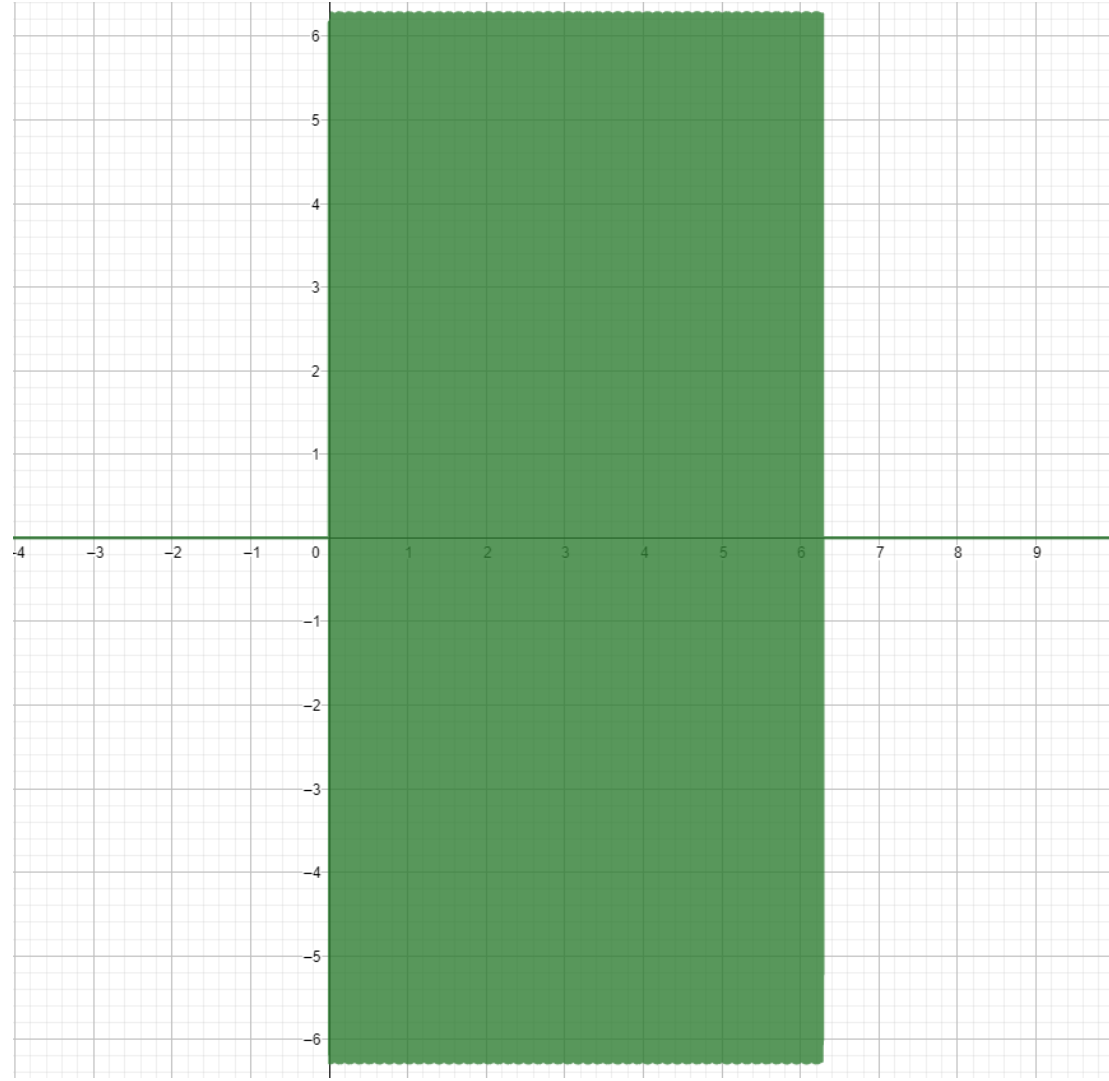
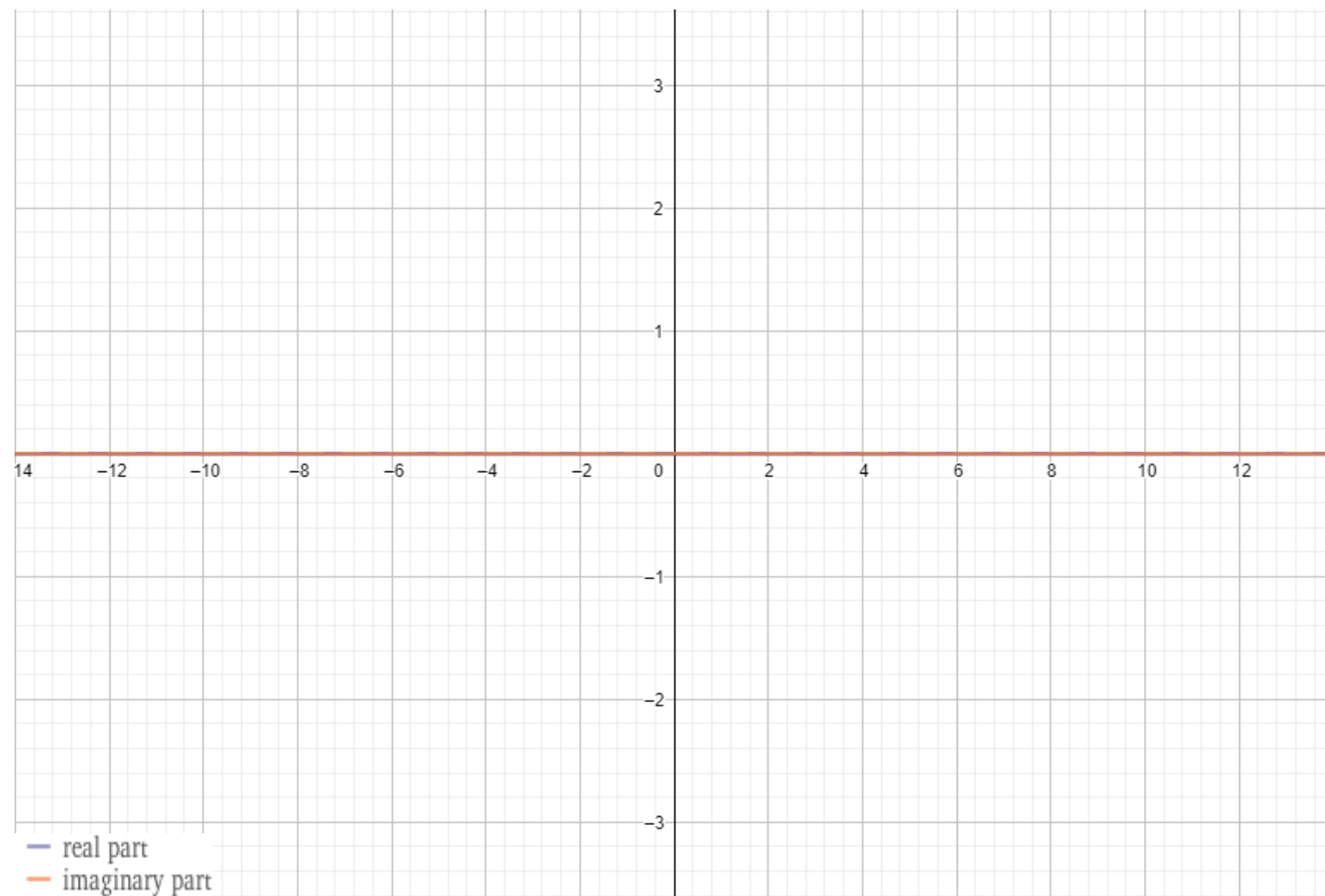


График
функции при
 $n \rightarrow \infty$



Спектр
функции при
 $n \rightarrow \infty$



Амплитудный
спектр
функции при
 $n \rightarrow \infty$

